

Options Asiatiques

Enjeu

Ce sujet propose le calcul du prix d'une option asiatique. Une approximation est communément utilisée pour les valoriser (elle présente l'avantage d'être une formule fermée). Nous étudions la pertinence de cette approximation en la comparant à une valorisation par technique de Monte Carlo dans le cadre du modèle de Black & Scholes. Nous étudions aussi l'influence de la discrétisation des observations de la moyenne.

Notes.

- Lors des simulations numériques, on utilisera uniquement un générateur de nombres aléatoires de loi Uniforme.
- Pour les formules analytiques, on pourra utiliser la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, dont une approximation numérique est donnée en annexe.

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 1. On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t . Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ la volatilité (supposée constante) et S_0 la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante

$$\begin{aligned}dS(t) &= S(t)(r dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= S_0 > 0\end{aligned}$$

Q1) Calculer $S(t)$.

Option Asiatique

Une option Asiatique confère à son possesseur le droit d'échanger la moyenne d'un actif sur une période donnée à un prix fixe. Ces options sont très utilisées car elles sont moins chères que les options européennes et couvrent contre les variations moyennes de prix ce qui est le facteur de risque principal pour les entreprises dont l'activité est continue. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P^0 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\varepsilon \left(\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T S(t) dt - K \right) \right)_+ \right] \quad (1)$$

sous probabilité Risque Neutre avec $\varepsilon = 1$ pour un Call et $\varepsilon = -1$ pour un Put.

Q2) Indiquer comment calculer le prix d'une option Asiatique déjà commencée ($t_0 < 0$) lorsque l'on sait calculer le prix d'une option Asiatique commençant aujourd'hui ($t_0 = 0$).

Ainsi sans perte de généralité, nous regardons le cas $t_0 = 0$ dans la suite.

Turnbull & Wakeman ont proposé d'approximer la somme de lois log-normales par une loi log-normale. En égalant les 2 premiers moments ils proposent d'approximer la distribution de $\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$ par celle de $S_A(T)$:

$$P^{0,TW} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(\varepsilon (S_A(T) - K))_+ \right]$$

avec S_A un sous-jacent ayant la même dynamique que $S(t)$. En choisissant

- r remplacé par $r_A = \frac{\ln(M_1)}{T}$
- σ remplacé par $\sigma_A = \sqrt{\frac{\ln(M_2)}{T} - 2r_A}$
- $M_1 = \frac{e^{rT} - 1}{rT}$
- $M_2 = \frac{2e^{(2r+\sigma^2)T}}{(r+\sigma^2)(2r+\sigma^2)T^2} + \frac{2}{rT^2} \left[\frac{1}{2r+\sigma^2} - \frac{e^{rT}}{r+\sigma^2} \right]$

on obtient

$$\begin{cases} \mathbb{E}[S_A(T)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T S(t) dt \right] \\ \mathbb{E} \left[(S_A(T))^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{T-t_0} \int_{t_0}^T S(t) dt \right)^2 \right] \end{cases}$$

Q3) Choisir l'étude d'une option (Call ou Put) pour l'ensemble des questions suivantes. Calculer le prix de l'option $P^{0,TW}$ avec cette approximation. L'implémenter.

En réalité, il est impossible de constater la moyenne continue, ainsi la moyenne est contractuellement toujours calculée sur une période discrète (prix de fermetures par exemple). Le prix de l'option Asiatique réelle est donc

$$P^{\Delta t} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\varepsilon \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) - K \right) \right)_+ \right]$$

où $N\Delta t = T$.

Nous cherchons à comparer l'approximation de Turnbull & Wakeman à un pricing Monte Carlo.

L'approximation de Turnbull & Wakeman dans le cas discret s'adapte comme suit : en égalant cette fois les 2 premiers moments de $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t)$ et du sous-jacent synthétique S_A , le prix de l'option Asiatique réelle est approximée par

$$P^{\Delta t, TW} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[(\varepsilon (S_A(T) - K))_+ \right]$$

avec S_A un sous-jacent ayant la même dynamique que $S(t)$, en choisissant

- r remplacé par $r_A = \frac{\ln(M_1)}{T}$
- σ remplacé par $\sigma_A = \sqrt{\frac{\ln(M_2)}{T} - 2r_A}$
- $M_1 = \frac{1}{N} \cdot \frac{e^{r\Delta t}(1-e^{rN\Delta t})}{1-e^{r\Delta t}}$
- $M_2 = \frac{1}{N^2} \left[e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \frac{1-e^{(2r+\sigma^2)N\Delta t}}{1-e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}} \right] + \frac{1}{N^2} \left[\frac{2e^{r\Delta t}}{1-e^{r\Delta t}} \left(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \frac{1-e^{(2r+\sigma^2)(N-1)\Delta t}}{1-e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}} - e^{((N+1)r+\sigma^2)\Delta t} \frac{1-e^{(r+\sigma^2)(N-1)\Delta t}}{1-e^{(r+\sigma^2)\Delta t}} \right) \right]$

Q4) Implémenter le prix $P^{\Delta t, TW}$ de l'option Asiatique avec cette approximation

Nous nous intéressons désormais à l'implémentation d'un estimateur du prix de l'option Asiatique $P^{\Delta t}$ par méthode de Monte-Carlo.

Q5) Proposer une méthode pour simuler une trajectoire $(W(i\Delta t))_{i=1..N}$. Implémenter un estimateur de $P^{\Delta t}$ par une méthode de Monte Carlo classique. On choisira pour les applications $\sigma = 0.3$ (sauf pour Q10), $S_0 = 1$, $K = 1$ (sauf pour Q9 Q11 Q12), $\Delta t = \frac{1}{252}$ an (sauf pour Q11 Q12), $r = 0.01$ et $T = 6$ mois.

La volatilité et le taux sont annuels.

Nous dénotons désormais par $P^{\Delta t, MC}$ l'estimateur Monte-Carlo de $P^{\Delta t}$.

Nous cherchons alors à réduire l'intervalle de confiance de $P^{\Delta t, MC}$.

Q6) Montrer que

$$e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)} \stackrel{\text{Loi}}{=} S_0 e^{\left(r^E - \frac{(\sigma^E)^2}{2}\right)T + \sigma^E W_T^E}$$

où W^E est un $\mathbb{Q}$ -mouvement Brownien, et avec r^E et σ^E à déterminer. Calculer

$$e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\varepsilon \left(e^{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln S(i\Delta t)} - K \right) \right)_+ \right]$$

Q7) En déduire un nouvel estimateur Monte-Carlo de $P^{\Delta t}$ par variable de contrôle, et l'implémenter.

Nous dénotons désormais par $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ l'estimateur Monte-Carlo de $P^{\Delta t}$ avec variable de contrôle.

Q8) Tracer les estimateurs $P^{\Delta t, MC}$ et $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ en fonction du nombre de trajectoires ainsi que leurs intervalles de confiance asymptotique à 90%. Ajouter également l'approximation de Turnbull & Wakeman (discrète) $P^{\Delta t, TW}$. Commenter.

Q9) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimateur $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ est précis (préciser votre critère) et tracer $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ ainsi son intervalle de confiance asymptotique à 90% en fonction de K , $K \in [0, 2]$ (garder les autres paramètres). Ajouter également l'estimateur $P^{\Delta t, TW}$. Tracer également la différence des 2 estimateurs, et zoomer autour de $K = 1$. Commenter.

Q10) Tracer l'estimateur $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ ainsi son intervalle de confiance asymptotique à 90% en fonction de σ , $\sigma \in [0, 0.8]$ (garder les autres paramètres). Ajouter également l'estimateur $P^{\Delta t, TW}$. Tracer également la différence des 2 estimateurs. Commenter.

Nous considérons maintenant observations (fixings) de prix plus espacés.

Q11) Tracer sur un même graphe l'approximation de Turnbull & Wakeman $P^{\Delta t, TW}$ en fonction K , $K \in [0, 2]$ pour $\Delta t = 0$ (cas continu), $\Delta t = \frac{1}{252}$ (un jour), $\Delta t = \frac{1}{52}$ (une semaine), $\Delta t = \frac{1}{12}$ (un mois), et zoomer autour de $K = 1$. Commenter.

Q12) Tracer la différence entre l'estimateur Monte-Carlo $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ et l'approximation de Turnbull & Wakeman $P^{\Delta t, TW}$ en fonction K , $K \in [0, 2]$ pour

$\Delta t = \frac{1}{252}, \frac{1}{52}, \frac{1}{12}$, et zoomer autour de $K = 1$. Comparer à la largeur de l'intervalle de confiance de l'estimateur $P^{\Delta t, MC, ctrl}$ (pour la discrétisation correspondante). Commenter.

Q13) Comparer les temps de calcul pour les 2 estimateurs ($P^{\Delta t, MC, ctrl}$ et $P^{\Delta t, TW}$) pour ces 3 valeurs de Δt .

Q14) Conclure sur la précision et l'intérêt de l'approximation de Turnbull & Wakeman, et sur l'influence de la discrétisation des observations sur le prix de l'option.

Q15) Calculer théoriquement

$$e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) - K \right)_+ \right] - e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(K - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta t) \right)_+ \right]$$

Q16) Dédurre des questions Q6 et Q15 une méthode de réduction de variance par variable de contrôle. Identifier le paramètre du contrat discriminant l'efficacité de la réduction de variance provenant de Q15, et illustrer graphiquement cette méthode en fonction de ce paramètre. Commenter.

ANNEXE

Approximation de Abramowitz & Stegun de la fonction de distribution d'une Gaussienne centrée réduite : $\forall x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \epsilon(x)$$

avec $t = \frac{1}{1+b_0 x}$ et

$$\begin{cases} b0 &= 0.2316419 \\ b1 &= 0.319381530 \\ b2 &= -0.356563782 \\ b3 &= 1.781477937 \\ b4 &= -1.821255978 \\ b5 &= 1.330274429 \end{cases}$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}$.