

Options sur panier

Enjeu

Ce sujet propose le calcul du prix d'une option sur panier de deux actifs. Il n'existe pas de formule fermée pour valoriser ces options mais une approximation est communément utilisée (elle présente l'avantage d'être une formule fermée). Nous étudions la pertinence de cette approximation en la comparant à une valorisation par technique de Monte Carlo dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

Notes.

- Lors des simulations numériques, on utilisera uniquement un générateur de nombres aléatoires de loi Uniforme.
- Pour les formules analytiques, on pourra utiliser la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, dont une approximation numérique est donnée en annexe.

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 2. On pose $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$ le vecteur des cours des actifs risqués au temps t . Soit $W = (W_1(t), W_2(t))_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre de matrice de corrélation $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ avec $-1 < \rho < 1$. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ le vecteur des volatilités (supposées constantes) et $(S_{1,0}, S_{2,0})$ le vecteur des valeurs initiales des actifs (supposées déterministes). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif i suivante

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t) (r dt + \sigma_i dW_i(t)) \\ (S_1(0), S_2(0)) &= (S_{1,0}, S_{2,0}) > (0, 0) \end{aligned}$$

Q1) Calculer $S(t)$.

Option sur panier

Une option sur panier confère à son possesseur le droit d'acheter ou de vendre un panier de plusieurs actifs (éventuellement pondérés) à un prix fixé à l'avance. Le prix de cette option sur un panier de 2 actifs est donc dans notre modèle

Call

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+] \quad (1)$$

Put

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+] \quad (2)$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q2) Nous nous proposons dans un premier temps d'approximer la somme de loi log-normale par une loi log-normale. Soit $S_B(t)$ un actif suivant la même dynamique que $S_1(t)$ (ou de façon équivalente $S_2(t)$) avec les paramètres suivants

- valeur initiale $S_B(0) = S_{B,0} = \alpha S_{1,0} + \beta S_{2,0}$
- tendance (sous probabilité Risque Neutre) r_B
- volatilité (sous probabilité Risque Neutre) σ_B

Calculer r_B et σ_B de sorte que l'actif $S_B(t)$ ait le mêmes moments d'ordres 1 et 2 que le panier :

$$\mathbb{E}[\alpha S_1(T) + \beta S_2(T)] = \mathbb{E}[S_B(T)]$$

et

$$\mathbb{E}[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T))^2] = \mathbb{E}[(S_B(T))^2]$$

Q3) Choisir l'étude d'une option (Call ou Put) pour l'ensemble des questions suivantes. Calculer et implémenter le prix de l'option avec cette approximation.

Nous cherchons maintenant à comparer l'approximation précédente à un pricing Monte Carlo.

Q4) Proposer une méthode pour simuler $W(T)$. Implémenter la calcul de P par une méthode de Monte Carlo classique. On choisira pour les applications $\sigma = (0.35, 0.4)$, $\alpha S_{1,0} = \beta S_{2,0} = 1$ (sauf pour Q8 Q9 Q10), $\rho = 0.3$ (sauf pour

Q7 Q9 Q11), $K = 2$, $r = 0.01$ et $T = 2$ ans. Les volatilités et le taux sont annuels.

Q5) Implémenter le calcul de P par une méthode de Monte Carlo utilisant une technique de réduction de variance basée sur le conditionnement.

Q6) Calculer les variances empiriques (des estimateurs) obtenues en fonction du nombre de trajectoires pour les estimations Monte Carlo de P . Tracer sur le même graphique les estimateurs de P en fonction du nombre de trajectoires ainsi que leurs intervalles de confiance asymptotiques à 90%. Comparer à l'approximation log-normale.

Q7) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (avec réduction de variance seulement) (préciser votre critère) et tracer sur le même graphique le prix de l'option en fonction de ρ pour $\rho \in]-1, 1[$ (garder les autres paramètres) pour les 2 estimations (Monte Carlo variance réduite et approximation log-normale) de P . Tracer également la différence des estimateurs. Commenter.

Q8) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise et tracer sur le même graphique le prix de l'option en fonction de $\alpha S_{1,0}$ pour $\alpha S_{1,0} \in [0, 2]$ (garder les autres paramètres) pour ces mêmes 2 estimations de P . Tracer également la différence des estimateurs. Commenter.

Q09) Tracer l'estimateur de P (avec réduction variance) ainsi que son intervalle de confiance asymptotique à 90% en fonction de K pour $K \in [1, 3]$ (garder les autres paramètres).

Q10) Calculer analytiquement

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+] - e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \beta S_2(T) - \alpha S_1(T))_+]$$

En déduire une méthode de réduction de variance par variables de contrôle. Identifier le paramètre du contrat discriminant l'efficacité de cette réduction de variance, et illustrer graphiquement cette méthode en fonction de ce paramètre. Commenter.

Q11) Proposer une méthode d'estimation du $\Delta_1 = \frac{\partial P}{\partial S_{1,0}}$ pour l'approximation log-normale et pour le pricing Monte Carlo (on pourra utiliser le conditionnement) par dérivée numérique. Les implémenter et tracer sur le même graphique le Δ_1 en fonction de $S_{1,0}$ pour $S_{1,0} \in [0, 4]$ pour $\rho = -0.5$ et 0.5 (garder les autres paramètres) pour les 2 estimations. On prendra ici $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Tracer également la différence des estimateurs. Commenter.

Q12) Calculer

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(e^{\alpha \ln[S_1(T)] + \beta \ln[S_2(T)]} - K)_+]$$

En déduire une méthode de réduction de variance par variables de contrôle.
Illustrer graphiquement cette méthode.

ANNEXE

Approximation de Abramowitz & Stegun de la fonction de distribution d'une
Gaussienne centrée réduite : $\forall x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \epsilon(x)$$

avec $t = \frac{1}{1+b_0 x}$ et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_0 & = & 0.2316419 \\ b_1 & = & 0.319381530 \\ b_2 & = & -0.356563782 \\ b_3 & = & 1.781477937 \\ b_4 & = & -1.821255978 \\ b_5 & = & 1.330274429 \end{array} \right.$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}$.