Cours PRB222

Options Bermuda

Enjeu

Ce sujet propose le calcul du prix d'une option sur un actif dont l'exercice peut avoir lieu à une date au choix parmi un ensemble prédéfini de dates. Il se pose alors la question de l'exercice optimal. Nous étudions tout d'abord le cas de deux dates d'exercice possibles qui a la particularité d'être simple dans le cadre considéré du modèle de Black & Scholes puisque le prix de l'option Européenne s'écrit sous forme fermée. Nous considérons ensuite le cas plus complexe de trois dates d'exercices où nous faisons alors appel à une méthode de régression Longstaff-Schwarz, très fréquement utilisée en pratique, pour approcher le choix d'exercice optimal.

Notes.

- Lors des simulations numériques, on utilisera uniquement un générateur de nombres aléatoires de loi Uniforme.

- Pour les formules analytiques, on pourra utiliser la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, dont une approximation numérique est donnée en annexe.

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 1. On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t. Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ la volatilité (supposée constante) et S_0 la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)\left(rdt + \sigma dW(t)\right) \\ S(0) &= S_0 > 0 \end{aligned}$$

Q1) Calculer $S(t)$.

Option Européenne vanille

Un Put confère à son possesseur le droit de vendre à une date fixée T un actif à un prix K fixé à l'avance. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P_1 = e^{-rT}\mathbb{E}[(K - S(T))_+] \quad (1)$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q2) Calculer analytiquement P_1.

Q3) Proposer une méthode pour simuler $W(T)$. Implémenter la calcul de P_1 par une méthode de Monte Carlo classique. On choisira pour les applications $\sigma = 0.2$, $S_0 = 1$ (sauf pour Q15), $r = 0.02$, $T = 5$ ans et $K = 1$. La volatilité et le taux sont annuels.

Q4) Implémenter également le calcul de l'intervalle de confiance asymptotique de l'estimateur Monte Carlo à 90%. Tracer sur le même graphique l'estimateur Monte Carlo de P_1 en fonction du nombre de trajectoires ainsi que l'intervalle de confiance asymptotique à 90%. Ajouter également le prix théorique. Commenter.

Option Bermuda à 2 exercices

Un Put Bermuda confère à son possesseur le droit de vendre à une date parmi plusieurs dates $\{T_i\}_{i=1..N}$ prédéfinies un actif à un prix K fixé à l'avance. Nous notons P_N le prix de cette option.

Q5) Prouver que

$$P_N \geq \max_{i=1..N} \left(P_1|_{T=T_i} \right)$$

en exhibant une stratégie arbitrable dans le cas contraire. Nous nous considérons dans la suite de cette section $N = 2$.

Q6) Ecrire le prix de l'option Bermuda en $t = T_1$ (*Indication : écrire préalablement le prix dans le cas où l'exercice n'a pas lieu en T_1 et dans le cas où l'exercice a lieu en T_1).*

Q7) En déduire que le prix en $t = 0$ est de la forme

$$\begin{aligned} P_2 = \; & e^{-rT_2}\mathbb{E}[(K - S(T_2))_+ \mathbb{1}_{S(T_1) \geq \bar{K}}] \\ & + e^{-rT_1}\mathbb{E}[(K - S(T_1))\mathbb{1}_{S(T_1) < \bar{K}}] \end{aligned} \quad (2)$$

avec $\bar{K}$ solution d'une equation à exhiber. Prouvez l'existence et l'unicité de $\bar{K}$, et calculer numériquement $\bar{K}$ (on pourra utiliser un solveur externe).

Q8) Proposer une méthode pour simuler $(W(t))_{t\in\{T_1,T_2\}}$. Implémenter la calcul de P_2 par une méthode de Monte Carlo classique. On choisira pour les applications $\sigma = 0.2$ (sauf pour Q11), $S_0 = 1$ (sauf pour Q10, Q11 & Q15), $r = 0.02$ et $T_1 = 3$ ans, $T_2 = 5$ ans et $K = 1$. La volatilité et le taux sont annuels.

Q9) Améliorer la convergence en utilisant une méthode de réduction de variance par variables antithétiques. Tracer sur le même graphique les 2 estimateurs de P_2 (avec et sans réduction de variance) ainsi que leurs intervalles de confiance à 90% en fonction du nombre de trajectoires. Commenter.

Q10) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (avec réduction de variance seulement) (préciser votre critère) et tracer sur le même graphique le prix P_2 en fonction de S_0 pour $S_0 \in [0.5, 2]$ (garder les autres paramètres) ainsi que $P_1|_{T=T_1}$ et $P_1|_{T=T_2}$. Commenter.

On appelle Switch Option la valeur $SW = P_2 - \max\left(P_1|_{T=T_1}, P_1|_{T=T_2}\right)$. Elle représente le prix de la possibilité de choisir parmi les deux options Européennes.

Q11) Tracer sur le même graphique le prix SW (avec réduction de variance seulement) en fonction de S_0 pour $S_0 \in [0.5, 2]$ et $\sigma \in \{0.1, 0.2, 0.4\}$ (garder les autres paramètres). Commenter.

Option Bermuda à 3 exercices

Nous nous considérons dans cette section $N = 3$. Nous notons P_3 le prix de cette option et nous notons P_2 le prix de l'option Bermuda à deux exercices dans $\{T_2, T_3\}$.

Q12) Montrer que le prix en $t = 0$ est de la forme

$$\begin{aligned} P_3 \quad = \quad & e^{-rT_3}\mathbb{E}[(K - S(T_3))_+ \mathbb{1}_{S(T_2)\geq \bar{K}} \mathbb{1}_{S(T_1)\geq \tilde{K}}] \\ & +e^{-rT_2}\mathbb{E}[(K - S(T_2))\mathbb{1}_{S(T_2)<\bar{K}} \mathbb{1}_{S(T_1)\geq \tilde{K}}] \\ & +e^{-rT_1}\mathbb{E}[(K - S(T_1))\mathbb{1}_{S(T_1)<\tilde{K}}] \end{aligned} \tag{3}$$

avec $\tilde{K}$ solution d'une equation à exhiber. Prouvez l'existence et l'unicité de $\tilde{K}$ *(le calcul numérique de $\tilde{K}$ n'est pas demandé ici).*

Le calcul de $\tilde{K}$ est alors plus compliqué que celui de $\bar{K}$ car le prix P_2 en date T_1 n'est pas connu analytiquement et demanderait une seconde simulation Monte Carlo au sein de chaque trajectoire (Monte Carlo de Monte Carlo). Ceci est en pratique trop coûteux en performance numérique. Longstaff & Schwartz ont proposé d'estimer P_2 en date T_1 par régression de la distribution (simulée) de P_2 en date T_2 sur la distribution (simulée) d'une base de variables aléatoires en T_1 comme suit.

Nous prendrons comme base de régression $\mathcal{B} = \left\{1, S_{T_1}, S_{T_1}^2, S_{T_1}^3\right\}$.

Algorithme de Longstaff & Schwartz :

- i. Simuler les distributions de $\{S_{T_1}, S_{T_2}, S_{T_3}\}$
- ii. Calculer la distribution de P_2 en date T_2 (*cf.* section précédente)
- iii. Régresser linéairement cette distribution sur $\mathcal{B}$ (moindres carrés) :

$$P_2|_{T_2} \quad = \quad \Sigma_{k=0}^{3} \omega_k S_{T_1}^k + \varepsilon$$

  avec $\widehat{\mathbb{E}}(\varepsilon) = 0$ et $\{\omega_k\}_{k=0..3} = \text{argmin}\widehat{\mathbb{V}ar}(\varepsilon)$ (les notations $\widehat{\mathbb{E}}$ et $\widehat{\mathbb{V}ar}$ désignant les estimateurs empiriques d'espérance et variance)

- iv. Resimuler (nouveaux tirages[1]) les trajectoires et en déduire une estimation de P_3 en utilisant l'approximation

$$P_2|_{T_1} \quad \approx \quad e^{-r(T_2-T_1)} \left(\Sigma_{k=0}^{3} \omega_k S_{T_1}^k\right)$$

  lors de **l'évaluation de l'indicatrice d'exercice** en T_1 (le prix en cas de non exercice est alors simulé normalement).

Cet algorithme est très utilisé en pratique.

Q13) Montrer l'égalité matricielle

$$A \cdot \Omega \quad = \quad B$$

avec

- le vecteur Ω défini par

$$\Omega_i \quad = \quad w_i$$

- le vecteur B défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B_0 & = & \mathbb{E}\left(P_2|_{T_2}\right) \\ B_i & = & \mathbb{C}ov\left(P_2|_{T_2}, S_{T_1}^i\right) \qquad \forall i = 1..3 \end{array} \right.$$

[1] l'utilisation des mêmes tirages pour la régression et la valorisation inclurait un biais de non mesurabilité dans la valorisation

- et la matrice A définie par

$$\begin{cases} A_{0,j} & = & \mathbb{E}\left(S_{T_1}^j\right) \\ A_{i,j} & = & \mathbb{C}ov\left(S_{T_1}^i, S_{T_1}^j\right) & \quad \forall i,j = 1..3 \end{cases}$$

et estimer $\{\omega_k\}_{k=0..3}$ et $\widehat{\mathbb{V}ar}(\varepsilon)$ *(ne pas utiliser de réduction de variance dans cette régression).*

Q14) En déduire l'estimation de $\tilde{K}$ correspondante et implémenter la calcul de P_3 par méthode de Monte Carlo (idéalement avec réduction de variance). On choisira pour les applications $\sigma = 0.2$, $S_0 = 1$ (sauf pour Q15), $r = 0.02$ et $T_1 = 1$ ans, $T_2 = 3$ ans, $T_3 = 5$ ans et $K = 1$. La volatilité et le taux sont annuels.

Q15) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (préciser votre critère) et tracer sur le même graphique les prix P_1, P_2 et P_3 en fonction de S_0 pour $S_0 \in [0.5, 2]$ (garder les autres paramètres). Commenter.

Facultatif

Q16) Evaluer la qualité de la régression en utilisant la méthode de Longstaff & Schwartz sur le Put Bermuda à 2 exercices.

Un Call Bermuda confère à son possesseur le droit d'acheter à une date parmi plusieurs dates $\{T_i\}_{i=1..N}$ un actif à un prix K fixé à l'avance.

Q17) Montrer que, **dans ce modèle**, si $r > 0$, le prix d'un Call Bermuda est égal au prix d'un Call Européen.

ANNEXE

Approximation de Abramowitz & Stegun de la fonction de distribution d'une Gaussienne centrée réduite : $\forall x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5\right) + \epsilon(x)$$

avec $t = \frac{1}{1+b_0 x}$ et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b0 & = & 0.2316419 \\ b1 & = & 0.319381530 \\ b2 & = & -0.356563782 \\ b3 & = & 1.781477937 \\ b4 & = & -1.821255978 \\ b5 & = & 1.330274429 \end{array} \right.$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}$.