

Options sur Best Of

Enjeu

Ce sujet propose le calcul du prix d'une option sur maximum d'un panier d'actifs. Cette option est traditionnellement appelée option sur Best Of. Plus précisément, nous considérons en premier lieu le contrat forward (contrat à terme) sur Best Of, puis nous considérons le cas d'un put sur Best Of. Cette option est dépendante de la loi jointe des actifs, nous étudions en particulier cet aspect. Nous utilisons la méthode de valorisation par technique de Monte Carlo dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

Notes.

- Lors des simulations numériques, on utilisera uniquement un générateur de nombres aléatoires de loi Uniforme.

- Pour les formules analytiques, on pourra utiliser la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, dont une approximation numérique est donnée en annexe.

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 3. On pose $S(t) = (S_1(t), S_2(t), S_3(t))$ le vecteur des cours des actifs risqués au temps t . Soit $W = (W_1(t), W_2(t), W_3(t))_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre de matrice de corrélation Γ . Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ le vecteur des volatilités (supposées constantes) et $S_0 = (S_{1,0}, S_{2,0}, S_{3,0})$ le vecteur des valeurs initiales des actifs (supposées déterministes). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif i suivante : $\forall i = 1..3$

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t) (r dt + \sigma_i dW_i(t)) \\ S_i(0) &= S_{i,0} > 0 \end{aligned}$$

et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

avec $-\frac{1}{2} < \rho \leq 1$.

Q1) Calculer $S(t)$.

Forward sur Best Of

Un contrat forward sur Best Of confère à son possesseur l'obligation d'acheter l'actif le plus cher parmi plusieurs actifs prédéfinis à un prix fixé à l'avance. Le prix de ce forward sur Best Of de 3 actifs est donc dans notre modèle

$$P^1 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max_{i=1..3} \{S_i(T)\} - K \right]$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q2) Montrer que le prix vérifie

$$P^1 \geq \max_{i=1..3} \{S_{i,0}\} - e^{-rT} K$$

Dans quels cas simples en fonction de σ et ρ a-t-on égalité (expliquer) ?

Q3) Proposer une méthode pour simuler $W(T)$. Implémenter le calcul d'un estimateur de P^1 par une méthode de Monte Carlo classique. On choisira pour les applications $\sigma_i = 0.3$, $S_{i,0} = 1 \forall i$ (sauf pour Q11), $\rho = 0.3$ (sauf pour Q6 Q10), $K = 1$ (sauf pour Q10), $r = 0.02$ et $T = 1.5$ ans. Les volatilités et le taux sont annuels.

Q4) Implémenter le calcul d'un estimateur de P^1 par une méthode de Monte Carlo utilisant une technique de réduction de variance par variables antithétiques.

Q5) Calculer les variances empiriques (des estimateurs) obtenues en fonction du nombre de trajectoires pour les estimations (avec et sans réduction de variance) Monte Carlo de P^1 . Tracer sur le même graphique les estimateurs de P^1 en fonction du nombre de trajectoires ainsi que leurs intervalles de confiance asymptotiques à 90%.

Q6) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (avec réduction de variance seulement) (préciser votre critère) et tracer sur le même graphique l'estimateur de prix P^1 (avec réduction de variance) du forward en fonction de ρ pour $\rho \in]-0.5, 1[$ (garder les autres paramètres). Commenter.

Put sur Best Of

Un put Européen confère à son possesseur le droit mais pas l'obligation de vendre un actif à un prix fixé à l'avance. Le prix de ce put sur l'actif S_i est donc dans notre modèle

$$P^{E,i} = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S_i(T))_+]$$

sous probabilité Risque Neutre.

Un put sur Best Of confère à son possesseur le droit mais pas l'obligation de vendre l'actif le plus cher parmi plusieurs actifs prédéfinis à un prix fixé à l'avance. Le prix de ce put sur Best Of de 3 actifs est donc dans notre modèle

$$P^2 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(K - \max_{i=1..3} \{S_i(T)\} \right)_+ \right]$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q7) Calculer analytiquement et implémenter le prix de l'option $P^{E,i}$.

Q8) Dédire de la question précédente un majorant de P^2 .

Q9) Implémenter le calcul d'un estimateur de P^2 par une méthode de Monte Carlo utilisant une technique de réduction de variance par variables antithétiques. Tracer sur le même graphique cet estimateur en fonction du nombre de trajectoires ainsi que ses intervalles de confiance asymptotiques à 90%. Tracer également le même graphique dans le cas $\rho = 1$ et ajouter à celui-ci le précédent majorant. Commenter.

Q10) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (préciser votre critère) et tracer sur le même graphique l'estimateur de prix P^2 en fonction de ρ pour $\rho \in]-0.5, 1[$ (garder les autres paramètres) pour $K = 1$ et $K = 1.2$ et $K = 1.5$. Commenter.

Q11) Tracer sur un même graphe le prix $P^{E,1}$ et l'estimateur de prix P^2 en fonction de $S_{1,0}$ pour $S_{1,0} \in [0, 2]$ (garder les autres paramètres). Commenter.

Q12) Utiliser un put Européen sur S_1 comme variable de contrôle pour en déduire un nouvel estimateur du prix P^2 . Illustrer graphiquement cette méthode.

Nous considérons cette fois un put sur Best Of sur N sous-jacents. Les

sous-jacents sont modélisés avec la même la même dynamique, avec

$$\begin{aligned}\Gamma &= (\Gamma_{i,j})_{i,j=1..N} \\ \Gamma_{i,j} &= \mathbf{1}_{i=j} + \rho \mathbf{1}_{i \neq j}\end{aligned}$$

Le prix du Best Of est donc dans notre modèle

$$P^{2,N} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(K - \max_{i=1..N} \{S_i(T)\} \right)_+ \right]$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q13) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise et tracer sur un même graphe l'estimateur de prix $P^{2,N}$ en fonction de $N \in \{1, 3, 10, 25\}$ pour $\rho \in \{0, 0.5, 1\}$ (garder les autres paramètres) (*on pourra utiliser une librairie externe pour corréler les mouvements Browniens*). Commenter.

Call sur Best Of

Un call sur Best Of confère à son possesseur le droit mais pas l'obligation d'acheter un actif au choix parmi plusieurs actifs prédéfinis à un prix fixé à l'avance. Le prix de ce call sur Best Of de 3 actifs est donc dans notre modèle

$$P^3 = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\left(\max_{i=1..3} \{S_i(T)\} - K \right)_+ \right]$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q14) Quel lien existe-t-il entre le forward, le call, et le put sur Best of ?

Facultatif

Q15) Calculer analytiquement le prix du forward sur Best Of sur 2 actifs dans ce modèle.

ANNEXE

Approximation de Abramowitz & Stegun de la fonction de distribution d'une
Gaussienne centrée réduite : $\forall x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \epsilon(x)$$

avec $t = \frac{1}{1+b_0 x}$ et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b_0 & = & 0.2316419 \\ b_1 & = & 0.319381530 \\ b_2 & = & -0.356563782 \\ b_3 & = & 1.781477937 \\ b_4 & = & -1.821255978 \\ b_5 & = & 1.330274429 \end{array} \right.$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}$.