

Cours PRB222

Calcul de sensibilités

Grecques

Enjeu

Le calcul de sensibilités prend une forte importance en finance car il est à la base du portefeuille de couverture. Ce sujet propose le calcul de trois principales sensibilités par deux méthodes différentes basées sur la technique de Monte Carlo dans le cadre du modèle de Black & Scholes. Nous nous intéressons en premier lieu au calcul théorique dans le cas particulier de l'option vanille, que nous confrontons ensuite au calcul par Monte Carlo. Nous étudions ensuite le cas plus général d'une option sur panier pour lequel il n'existe pas de formule fermée.

Notes.

- Lors des simulations numériques, on utilisera uniquement un générateur de nombres aléatoires de loi Uniforme.
- Pour les formules analytiques, on pourra utiliser la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, dont une approximation numérique est donnée en annexe.
- Pour ce projet, on adoptera la notation $\delta_x(\Lambda)$ pour désigner une distribution de Dirac au point x appliqué à la variable Λ .

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 1. On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t . Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ la volatilité

(supposée constante) et S_0 la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe).
 Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(r dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= S_0 > 0 \end{aligned}$$

Q1) Calculer $S(t)$.

Option vanille

Un Call confère à son possesseur le droit d'acheter un actif à un prix fixé à l'avance. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(S(T) - K)_+] \quad (1)$$

sous probabilité Risque Neutre.

De la même façon, un Put confère à son possesseur le droit de vendre un actif à un prix fixé à l'avance. Le prix de cette option est donc dans notre modèle

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S(T))_+] \quad (2)$$

sous probabilité Risque Neutre.

Nous nous intéressons ici au calcul des sensibilités du prix d'une option vanille.

Choisir l'étude d'un Call ou d'un Put pour l'ensemble des questions suivantes.

Q2) Calculer le prix P de l'option choisie.

Q3) Rappeller les définitions des grecques Δ , Γ et Vega. Calculer ces quantités.

Nous voulons comparer 2 méthodes de dérivation : une méthode par différences finies

$$\frac{dP}{d\lambda} \approx \frac{1}{\epsilon} (P(\lambda + \epsilon) - P(\lambda))$$

et une méthode trajectorielle

$$\frac{d\mathbb{E}(f(\lambda))}{d\lambda} = \mathbb{E}\left(\frac{df}{d\lambda}(\lambda)\right)$$

Q4) Calculer les 3 grecques sous forme espérancielle dans le cas de la méthode trajectorielle.

Q5) Implémenter ces deux estimateurs en calculant les espérances par méthode de Monte Carlo pour calculer les grecques. On choisira pour les applications $\sigma = 0.3$, $S_0 = 1$ (sauf pour Q6), $K = 1$, $r = 0.01$ et $T = 2$ ans. La volatilité et le taux sont annuels. Commenter sur la valeur de ϵ à appliquer. *(Pour ne pas avoir un 'effet tirage' sur les estimateurs avec la méthode par différences finies, on utilisera les mêmes trajectoires pour les 2 évaluations. Par ailleurs, un Dirac pourra être approximé par une fonction de la forme $f(x) = \frac{1}{2\xi} \cdot 1_{x \in [-\xi, \xi]}$)*

Q6) Améliorer la convergence en utilisant une méthode de réduction de variance par variables antithétiques. Pour chacune des sensibilités Δ , Γ et Vega, tracer sur le même graphique les 4 estimateurs (différences finies/méthode trajectorielle, MC standard/réduction de variance) ainsi que leurs intervalles de confiance à 90% en fonction du nombre de trajectoires (avec toujours les mêmes paramètres). Ajouter la valeur théorique.

Q7) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel l'estimation est précise (préciser votre critère) et tracer les estimateurs avec réduction de variance de ces 3 sensibilités en fonction de $S_0 \in [0, 2]$. Comparer à la valeur théorique. Commenter.

Nous aimerions généraliser ces résultats dans le cadre d'une option sur panier, pour lequel il n'y a pas de formule fermée.

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 2. On pose $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$ le vecteur des cours des actifs risqués au temps t . Soit $W = (W_1(t), W_2(t))_{t \geq 0}$ un couple de mouvements Browniens standards de matrice de corrélation $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ avec $-1 < \rho < 1$. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ le vecteur des volatilités (supposées constantes) et $(S_{1,0}, S_{2,0})$ le vecteur des valeurs initiales des actifs (supposées déterministes). La dynamique du cours des actifs est donnée sous probabilité Risque Neutre par

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t) (r dt + \sigma_i dW_i(t)) \\ (S_1(0), S_2(0)) &= (S_{1,0}, S_{2,0}) > (0, 0) \end{aligned}$$

Option sur panier

Une option sur panier confère à son possesseur le droit d'acheter ou de vendre un panier de plusieurs actifs (éventuellement pondérés) à un prix fixé à l'avance. Le prix de cette option sur un panier de 2 actifs est donc dans notre modèle

Call

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+] \quad (3)$$

sous probabilité Risque Neutre.

Put

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+] \quad (4)$$

Nous nous intéressons aux sensibilités : $\Delta_1 = \frac{\partial P}{\partial S_{1,0}}$, $\Gamma_{1,1} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_{1,0}^2}$ et $Vega_1 = \frac{\partial P}{\partial \sigma_1}$.

Q8) Calculer les 3 grecques sous forme espérancielle dans le cas de la méthode trajectorielle.

Q9) Proposer une méthode pour simuler $W(t)$. Toujours pour le même type d'option (Call ou Put), implémenter les estimateurs (avec réduction de variance) des grecques. Pour chacune des sensibilités, tracer les 2 estimateurs (différences finies/méthode trajectorielle) ainsi que leurs intervalles de confiance à 90% en fonction du nombre de trajectoires.

On choisira pour les applications $\sigma = (0.25, 0.3)$, $\alpha = \beta = 0.5$, $S_{1,0} = S_{2,0} = 1$ (sauf pour Q9), $\rho = 0.5$ (sauf pour Q8), $r = 0.01$, $K = 1$ et $T = 2$ ans. Les volatilités et le taux sont annuels.

Q10) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel les estimateurs sont précis et les tracer ces 3 sensibilités en fonction de $S_{1,0}$ pour $S_{1,0} \in [0, 1]$. Comparer aux valeurs des mêmes sensibilités pour α options sur 1 actif de strike $K - \beta S_{2,0}$. Commenter.

Q11) Tracer les sensibilités ainsi que leurs intervalles de confiance à 90% en fonction K pour $K \in [0, 2]$ (garder les autres paramètres).

Q12) Tracer les sensibilités en fonction ρ pour $\rho \in]-1, 1[$ (garder les autres paramètres). Commenter.

Q13) Calculer analytiquement

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) + \beta S_2(T) - K)_+] - e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \beta S_2(T) - \alpha S_1(T))_+]$$

En déduire les relations entre les grecques Δ_1 , $\Gamma_{1,1}$ et $Vega_1$ du Call et du Put sur le même panier.

Q14) Les options sont en général couvertes en Δ avec ajustement de fréquence quotidienne; quels sont les paramètres et sensibilités qui permettent de juger de la pertinence de cette fréquence ?

ANNEXE

Approximation de Abramowitz & Stegun de la fonction de distribution d'une
Gaussienne centrée réduite : $\forall x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \epsilon(x)$$

avec $t = \frac{1}{1+b_0 x}$ et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b0 & = & 0.2316419 \\ b1 & = & 0.319381530 \\ b2 & = & -0.356563782 \\ b3 & = & 1.781477937 \\ b4 & = & -1.821255978 \\ b5 & = & 1.330274429 \end{array} \right.$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}$.