

Cours PRB222

Echantillonnage Préférenciel

Options exotiques

Enjeu

Ce sujet propose l'étude d'une méthode générique de réduction de variance applicable aux estimations numériques d'espérances par technique de Monte Carlo. Nous étudions dans un 1^{er} temps l'aspect théorique de la méthode, puis nous l'appliquons au pricing d'une option vanille où nous constaterons son efficacité, notamment loin de la monnaie. Enfin, nous l'appliquons au pricing de deux options plus exotiques pour lesquels il n'existe pas de formule fermée.

Notes.

- Lors des simulations numériques, on utilisera uniquement un générateur de nombres aléatoires de loi Uniforme.

- Pour les formules analytiques, on pourra utiliser la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, dont une approximation numérique est donnée en annexe.

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 3. On pose $S(t) = (S_1(t), S_2(t), S_3(t))$ le vecteur des cours des actifs risqués au temps t . Soit $W = (W_1(t), W_2(t), W_3(t))_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre de matrice de corrélation

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{pmatrix}$$

avec $-1 < \rho_{i,j} < 1$, $(i,j) \in \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ le vecteur des volatilités (supposées constantes) et $(S_{1,0}, S_{2,0}, S_{3,0})$ le vecteur des valeurs initiales des actifs (supposés déterministes). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif i suivante

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t) (r dt + \sigma_i dW_i(t)) \\ S(0) &= (S_{1,0}, S_{2,0}, S_{3,0}) > (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Q1) Calculer $S(t)$.

Echantillonnage Préférenciel

Nous nous intéressons au calcul d'espérance de forme générale :

$$\mathbb{E}[f(\theta, X)]$$

ou X est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\begin{cases} \mathbb{E}[|f(\theta, X)|] < \infty & \forall \theta \in \mathbb{R}^m \\ \mathbb{E}[f(\theta, X)] = \mathbb{E}[f(0, X)] & \forall \theta \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Cette situation arrive très souvent en finance et plus généralement dans les modèles Gaussiens. Nous nous restreignons donc au cas où $X \propto N(0, I_n)$.

Q2) Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Prouver que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}\left[g(X + \theta)e^{-\theta \cdot X - \frac{1}{2}|\theta|^2}\right]$$

Nous définissons alors

$$f : (\theta, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto f(\theta, X) = g(X + \theta)e^{-\theta \cdot X - \frac{1}{2}|\theta|^2} \in \mathbb{R}$$

qui vérifie les propriétés requises.

Le calcul de l'espérance $\mathbb{E}[f(\theta, X)]$ ne dépend pas de θ . L'estimation de celle-ci par une méthode de Monte Carlo

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\theta, X_i)$$

avec X_i des tirages indépendants d'une loi $N(0, I_n)$, converge asymptotiquement proportionnellement à

$$\sqrt{\frac{1}{N} \text{Var}(f(\theta, X))}$$

Nous cherchons donc à minimiser cette incertitude, atteinte pour

$$\theta_* = \underset{\theta \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \{\text{Var}(f(\theta, X))\}$$

Nous supposons que $\mathbb{E} [|f(\theta, X)|^2] < \infty$ et que l'on peut appliquer la règle de Leibniz de dérivation sous le signe somme.

Q3) Prouvez que

$$\nabla_{\theta} \text{Var}(f(\theta, X)) = \mathbb{E} \left[(\theta - X) g(X)^2 e^{-\theta \cdot X + \frac{1}{2} |\theta|^2} \right]$$

Nous allons estimer cette quantité par

$$u_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta - X_i) g(X_i)^2 e^{-\theta \cdot X_i + \frac{1}{2} |\theta|^2}$$

et chercher θ_*^N tel que $u_N(\theta_*^N) = 0$.

On entend dans cette notation par X_i la i^{eme} réalisation de la variable X , en particulier $X_i \in \mathbb{R}^n$

Nous ne considérons dans un 1^{er} temps que $S_1(t)$ (c'est-à-dire $n = 1$) et une fonction de la forme

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-rT} \left(S_0 \cdot e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x} - K \right)^+$$

où $(S_0, K) \in \mathbb{R}_+^2$.

Q4) A quel type d'option ce payoff actualisé correspond-il dans le cadre du modèle de Black & Scholes ?

Q5) Calculer analytiquement $P = \mathbb{E}[g(X)]$.

Q6) Implémenter l'algorithme de Newton à pas décroissant pour estimer la suite $(\theta_j^N)_j$ qui converge vers θ_*^N .

$$\begin{cases} \theta_0^N = 0 \\ u_N(\theta_j^N) + \nabla u_N(\theta_j^N) \cdot (\theta_{j+1}^N - \theta_j^N) = 0 \end{cases}$$

Pour ne pas avoir d'instabilité dans la convergence due aux intervalles de confiances sur les tirages de $(X_i)_{i=1..N}$, nous utiliserons toujours les mêmes tirages (avec un nombre suffisants de tirages pour qu'il existe au moins une valeurs de X_i telle que $g(X_i) \neq 0$).

Nous appelons $\hat{\theta}_*^N$ l'estimateur de θ_*^N obtenu.

Q7) Implémenter l'estimation de $P = \mathbb{E}[f(\theta, X)]$ par méthode de Monte Carlo.

On choisira pour les applications $\sigma = 0.3$, $S_{1,0} = 1$, $r = 0.01$ et $T = 2$ ans. Les volatilités et le taux sont annuels.

Q8) Pour $K = 1$, choisir N tel que $\hat{\theta}_*^N$ conduise à une précision suffisante de l'estimation de $\mathbb{E}[f(\theta, X)]$ (préciser votre critère) et tracer la suite (finie) $(\theta_j^N)_j$ en fonction de j . Garder la même valeur de N et tracer la même suite pour $K \in \{0.35, 0.54, 0.7, 1.24, 1.6, 2.5\}$ sur le même graphique. Commenter.

Q9) De la même façon, avec la même valeur de N et les mêmes valeurs de K , tracer cette fois sur le même graphique la suite $\left(\sqrt{\frac{1}{N} \hat{\mathbb{V}}ar(f(\theta_j^N, X))}\right)_j$ en fonction de j , où $\hat{\mathbb{V}}ar(Z)$ est l'estimateur standard sans biais de la variance de la série Z . Commenter.

Q10) Pour $K = 2.5$, tracer sur le même graphique P pour $\theta = 0$ identiquement (Monte Carlo standard) puis pour $\theta = \hat{\theta}_*^N$ (échantillonnage préférenciel) en fonction de N . Tracer sur le même graphe les intervalles de confiance à 90% de P pour chacun des estimateurs. Ajouter la valeur théorique.

Nous considérons maintenant 2 options plus exotiques portant sur 3 sous-jacents pour lesquels il n'existe pas de formule fermée (c'est-à-dire $n = 3$). Le payoff est alors de la forme $h(S_1(T), S_2(T), S_3(T))$.

Q11) En considérant le modèle proposé dans le 1^{er} paragraphe, quelle fonction g faut appliquer aux tirages simulés dans la loi $N(0, I_3)$ pour un payoff h ?

Nous considérons désormais le payoff suivant :

Call sur panier :

$$h(x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 - K)^+$$

Application : $(\lambda_i, S_{i,0}) = (\frac{1}{3}, 1) \forall i$, $K = 1.25$, $T = 1$, $\sigma = (0.25, 0.28, 0.3)$, $\rho_{i,j} = 0.5$, $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Q12) Implémenter la technique d'échantillonnage préférenciel et tracer sur le même graphique le prix de cette option pour $\theta = 0$ identiquement (Monte Carlo standard) puis pour $\theta = \hat{\theta}_*^N$ (échantillonnage préférenciel) en fonction de N . Tracer sur le même graphe les intervalles de confiance asymptotiques à 90% du prix pour chacun des estimateurs. Donner aussi la valeur de convergence de $\hat{\theta}_*^N$. *On pourra utiliser des routines externes pour la décomposition de Γ et pour les inversions de matrices.*

Symphonie :

$$h(x_1, x_2, x_3) = \left[\frac{1}{2} \max(x_1 - K, x_2 - K, x_3 - K) + \frac{1}{2} \min(x_1 - K, x_2 - K, x_3 - K) - \text{median}(x_1 - K, x_2 - K, x_3 - K) \right]^+$$

où

$$\text{median}(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3 - \min(z_1, z_2, z_3) - \max(z_1, z_2, z_3)$$

Application : mêmes paramètres.

Q13) Même question que 13) pour le payoff Symphonie.

Q14) Calculer

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(\lambda_1 S_1(T) + \lambda_2 S_2(T) + \lambda_3 S_3(T) - K)^+] - e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \lambda_1 S_1(T) - \lambda_2 S_2(T) - \lambda_3 S_3(T))^+]$$

En déduire une méthode de réduction de variance par variables de contrôle pour le calcul d'options sur panier par technique de Monte Carlo. Illustrer graphiquement cette méthode.

ANNEXE

Approximation de Abramowitz & Stegun de la fonction de distribution d'une Gaussienne centrée réduite : $\forall x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5) + \epsilon(x)$$

avec $t = \frac{1}{1+b_0 x}$ et

$$\begin{cases} b_0 &= 0.2316419 \\ b_1 &= 0.319381530 \\ b_2 &= -0.356563782 \\ b_3 &= 1.781477937 \\ b_4 &= -1.821255978 \\ b_5 &= 1.330274429 \end{cases}$$

et où $|\epsilon(x)| < 7.5 \cdot 10^{-8}$.