

Variance Swaps

Enjeu

Ce sujet propose le calcul du prix d'un Variance Swap. C'est un produit devenu commun sur les marchés. Le principe du payoff est de répliquer la variance réalisée par un actif sur une période donnée. Comme celle-ci n'est pas directement observable, le payoff contractuel s'appuie sur une approximation. Toutefois, les praticiens négligent généralement cette approximation. Ceci est étudié dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique dans une première partie. En outre, la variance réalisée peut être quasiment répliquée statiquement en fonction d'un continuum d'options vanilles. Cette réplication est étudiée dans une seconde partie.

Notes.

- Lors des simulations numériques, on utilisera uniquement un générateur de nombres aléatoires de loi Uniforme.
- Pour les formules analytiques, on pourra utiliser la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite, dont une approximation numérique est donnée en annexe.

Modèle

On considère un modèle lognormal en dimension 1. On pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t . Soit W un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt (supposé constant), σ un processus stochastique (volatilité) et S_0 la valeur initiale de l'actif (supposée déterministe). Nous supposons la dynamique du cours de l'actif suivante

$$\begin{aligned}dS(t) &= S(t)(r dt + \sigma(t)dW(t)) \\ S(0) &= S_0 > 0\end{aligned}$$

Q1) Calculer $S(t)$. On supposera l'existence et l'unicité de la solution forte.

Variance Swap théorique

Un Variance Swap théorique est un produit spéculatif (plus qu'un produit de couverture). Il consiste en l'achat au terme T de la variance réalisée sur $[t_0, T]$. Le prix de cette option est

$$VS^{theo} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sigma^2(s) ds - K^2 \right]$$

sous probabilité Risque Neutre.

Q2) Indiquer comment calculer le prix d'un Variance Swap théorique déjà commencé ($t_0 < 0$) lorsque l'on sait calculer le prix d'un Variance Swap théorique commençant aujourd'hui ($t_0 = 0$).

Ainsi sans perte de généralité, nous regardons le cas $t_0 = 0$ dans la suite.

Q3) Préciser pourquoi le modèle de Black & Scholes ($\sigma(t) = \sigma$) n'est pas pertinent pour ce produit.

On choisit la forme du processus de volatilité

$$\begin{aligned} d\sigma(t) &= \sigma(t)\nu dZ(t) \\ d\langle W, Z \rangle_t &= \rho dt \\ \sigma(0) &= \sigma_0 > 0 \end{aligned}$$

avec $(\rho, \nu, \sigma_0) \in [-1, 0[\times \mathbb{R}_+^2$ et Z un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre.

Q4) Calculer $\sigma(t)$. En déduire le prix VS^{theo} avec ce modèle. On choisira pour les applications $\nu = 0.8$ (sauf pour Q8 Q15), $S_0 = 1$, $\sigma_0 = 0.35$, $\rho = -0.5$ (sauf pour Q9 Q16), $K = 0.35$, $r = 0.01$ et $T = 3$ mois. La volatilité et le taux sont annuels.

Variance Swap réel

En réalité, il est impossible d'observer l'intégrale $\int_{t_0}^T \sigma^2(s) ds$ sur les marchés. Le contrat Variance Swap réel fait référence à une estimation de variance réalisée calculée sur une période discrète (prix de fermetures par exemple). Le prix du Variance Swap réel est donc défini par

$$VS^{real} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\frac{1}{T - t_0} \sum_{i=1}^N \left[\ln \left(\frac{S(t_0 + i\Delta t)}{S(t_0 + (i-1)\Delta t)} \right) \right]^2 - K^2 \right]$$

où $\Delta t = \frac{T-t_0}{N}$.

Q5) Proposer une méthode pour simuler une trajectoire de $(W(t), Z(t))$.

Q6) Proposer alors une méthode pour simuler une trajectoire de $(S(t), \sigma(t))$. Implémenter le calcul de VS^{real} par une méthode de Monte Carlo classique en tenant compte de la forme discrète de l'intégrale. On choisira $\Delta t = \frac{1}{252}$ an.

Q7) Améliorer la convergence en utilisant une méthode de réduction de variance par variables antithétiques. Tracer sur le même graphique les 2 estimateurs de VS^{real} (avec et sans réduction de variance) ainsi que leurs intervalles de confiance à 90% en fonction du nombre de trajectoires. Ajouter également VS^{theo} . Commenter.

Q8) Choisir un nombre de trajectoires pour lequel les estimations sont précises (préciser votre critère) et tracer sur un même graphique l'estimateur de VS^{real} avec réduction de variance ainsi que son intervalle de confiance asymptotique à 90% et VS^{theo} en fonction de ν , $\nu \in [0, 1.5]$ (garder les autres paramètres). Tracer également la différence des 2 estimateurs. Commenter.

Q9) Tracer sur un même graphique l'estimateur de VS^{real} avec réduction de variance ainsi que son intervalle de confiance asymptotique à 90% et VS^{theo} en fonction de ρ , $\rho \in]-1, 1[$ (garder les autres paramètres). Tracer également la différence des 2 estimateurs. Commenter.

Réplication par des options Européennes

Dans la pratique, les Variances Swap sont valorisés indépendamment de tout modèle grâce à un résultat de réplication. Nous nous intéressons à cette méthode dans la suite. Elle consiste premièrement en l'approximation

$$VS^{real} \approx VS^{theo} \quad (1)$$

dont la pertinence a été étudiée dans la partie précédente, puis à la réécriture de VS^{theo} sous une forme différente comme exposé dans la suite.

Q10) Prouver que $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (x, x_0) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \int_0^{x_0} (k - x)^+ f''(k) dk + \int_{x_0}^{\infty} (x - k)^+ f''(k) dk \end{aligned}$$

Q11) Prouver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(s) ds &= \frac{2}{T} \left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - rT - \left(\frac{S_T}{S_0} e^{-rT} - 1 \right) \right) \\ &+ \frac{2}{T} \left(\int_0^{S_0 e^{rT}} (k - S_T)_+ \frac{dk}{k^2} + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty (S_T - k)_+ \frac{dk}{k^2} \right) \end{aligned}$$

Indication. Exprimer $\sigma^2(t)dt$ en fonction de $\frac{dS_t}{S_t}$ et $d \ln(S_t)$

Q12) En déduire une stratégie de réplication du Variance Swap et que

$$VS^{theo} = \frac{2}{T} \left(\int_0^{S_0 e^{rT}} P(S_0, k) \frac{dk}{k^2} + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty C(S_0, k) \frac{dk}{k^2} \right) - e^{-rT} K^2$$

où $P(S_0, K)$ (resp. $C(S_0, K)$) est le prix d'un Put (resp. Call) de strike K .

Il est notable de constater que cette écriture permet, lorsque l'on accepte l'approximation (1), de s'affranchir de modèle sur σ , ce qui n'est pas le cas des résultats des questions Q5    Q9. En réalité, le prix des options Européennes est fixé par le marché (offre et demande) et ne correspond pas nécessairement au prix obtenu pour celles-ci avec notre modèle. Le résultat de la question Q12 permet donc de tenir compte des prix de marché.

On suppose alors que le prix de marché $P^{mar}(S_0, K)$ et $C^{mar}(S_0, K)$ des options Européennes est le suivant

$$\begin{cases} \forall K \in [0, S_0 e^{rT}] & P^{mar}(S_0, K) = P^{mod}(S_0, K) [\zeta K (S_0 e^{rT} - K) + 1] \\ \forall K \in [S_0 e^{rT}, 2S_0 e^{rT}] & C^{mar}(S_0, K) = C^{mod}(S_0, K) [\zeta (K - S_0 e^{rT}) (2S_0 e^{rT} - K) + 1] \\ \forall K \in [2S_0 e^{rT}, +\infty[& C^{mar}(S_0, K) = C^{mod}(S_0, K) \end{cases}$$

où $P^{mod}(S_0, K)$ (resp. $C^{mod}(S_0, K)$) est le prix d'un Put (resp. Call) de strike K dans le modèle.

On note VS^{mar} le prix du Variance Swap marché

$$VS^{mar} = \frac{2}{T} \left(\int_0^{S_0 e^{rT}} P^{mar}(S_0, k) \frac{dk}{k^2} + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty C^{mar}(S_0, k) \frac{dk}{k^2} \right) - e^{-rT} K^2$$

et on garde la notation VS^{theo} pour le prix obtenu avec le modèle

$$VS^{theo} = \frac{2}{T} \left(\int_0^{S_0 e^{rT}} P^{mod}(S_0, k) \frac{dk}{k^2} + \int_{S_0 e^{rT}}^\infty C^{mod}(S_0, k) \frac{dk}{k^2} \right) - e^{-rT} K^2$$

Q13) Montrer que VS^{mar} peut s'écrire sous la forme

$$VS^{mar} = VS^{theo} + \mathbb{E}[\Psi(S(T))]$$

Q14) Implémenter le calcul de VS^{mar} . Tracer sur un même graphique les estimateurs de VS^{theo} et VS^{mar} ainsi que leurs intervalles de confiance asymptotique à 90% en fonction de ζ , $\zeta \in]-1, 1[$ (garder les autres paramètres). Commenter.

Facultatif

Q15) Tracer la distribution de S_T pour $\nu \in \{0; 0.75; 1.5\}$ et $\rho = 0$ (garder les autres paramètres, utiliser une même échelle d'abscisses). Commenter l'effet de ν .

Q16) Tracer la distribution de S_T pour $\rho \in \{-0.75; 0; 0.75\}$ (garder les autres paramètres, utiliser une même échelle d'abscisses). Commenter l'effet de ρ .